@ EPFL

Transmissions par engrenages II

Paramètres normalisés de denture
Conditions de fonctionnement

Dr. S. Soubielle

Dans ce cours, nous allons définir…

… **Les paramètres normalisés de la roue dentée**

- … Rayon de base, rayon primitif, rayon de tête, rayon de pied, angle de pression, pas, module, nombre de dents, entraxe, etc.

… **L'entraxe de fonctionnement**

- … Et son impact sur les paramètres d'engrènement

… **Les conditions de fonctionnement d'un engrenage**

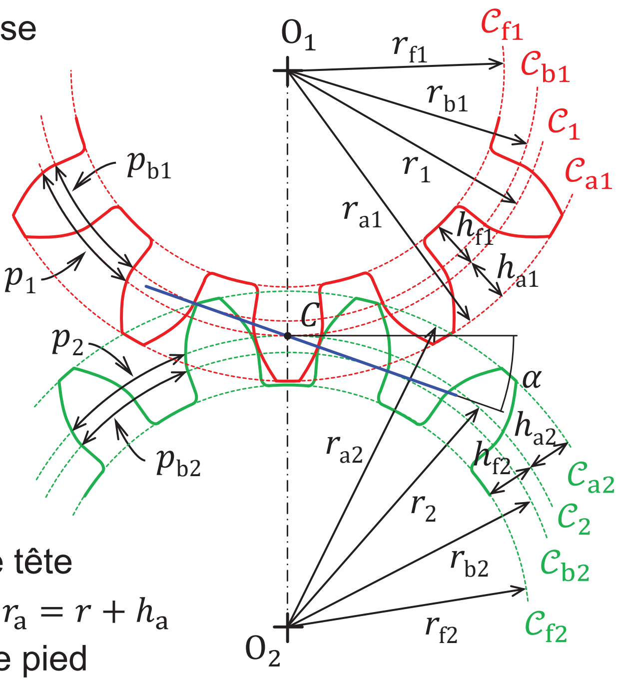
- … Condition d'engrènement
- … Condition de continuité et définition du rapport de conduite

… **Le phénomène d'interférence**

- … Interférence d'engrènement et interférence de taillage
- … Conditions de non-interférence

Paramètres normalisés – ISO 1122 (1/2)

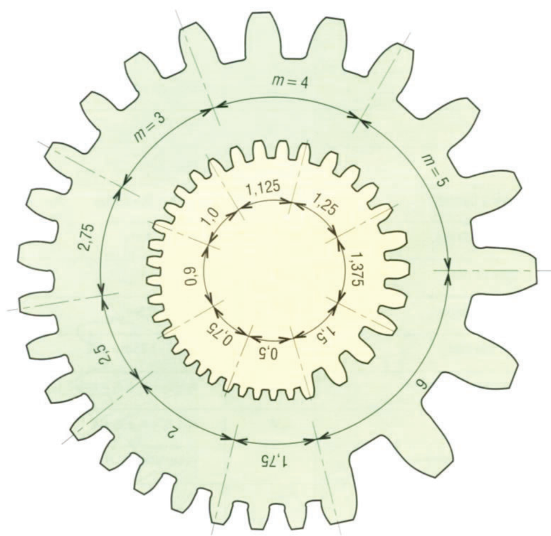
d_b // r_b diamètre de base // rayon de base
$\alpha\ (= 20°)$ angle de pression
d // r diamètre primitif // rayon primitif
avec $r = r_b / \cos\alpha$
p_b pas de base
p pas primitif
avec $p = p_b / \cos\alpha$
Z nombre de dents
avec $\pi \cdot d = p \cdot Z$
$m = p/\pi$ module
$\rightarrow d = m \cdot Z$
d_a // r_a diamètre de tête // rayon de tête
$h_a\ (= m)$ hauteur de saillie, telle que $r_a = r + h_a$
d_f // r_f diamètre de pied // rayon de pied
$h_f\ (= 1{,}25 \cdot m)$ hauteur de creux, telle que $r_f = r - h_f$
$a = r_1 + r_2$ entraxe de référence



Paramètres normalisés – ISO 1122 (2/2)

- **Valeur du module m**
  - Dépend des sollicitations mécaniques (voir cours TE III)
  - Valeurs normalisées – ISO 54 (extrait de la série principale)

Série principale selon ISO 54, valeurs en mm (extrait)		
0,5	2,5	10
0,6	3	12
0,8	4	16
1	5	20
1,25	6	25
1,5	8	32
2	10	40

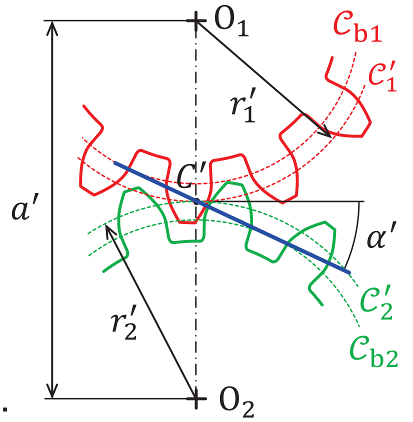


© Guide des Sciences et Technologies Industrielle, J.-L. Fanchon

Entraxe de fonctionnement

- **Fabrication → imprécision sur l'entraxe a**
  - Si a trop petit → impossible d'assembler les roues dentées
  - Si a trop grand → jeu dans l'engrenage

  → Entraxe de fonctionnement $a' >$ entraxe de référence a
- **Effet sur la transmission**
  - Angle de pression : $\alpha \rightarrow \alpha'$ ($> \alpha$)
  - Pôle C'
  - Rayons primitifs apparents :
    $r'_1 = r_{b1} / \cos\alpha'$ et $r'_2 = r_{b2} / \cos\alpha'$
  - Rapport de transmission :
    $i = r'_2 / r'_1 = r_{b2} / r_{b1}$
  - Expression de α' en fonction de a, a' et α :



$$a = r_1 + r_2 = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad a' = r'_1 + r'_2 = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos\alpha'} \quad \rightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$$

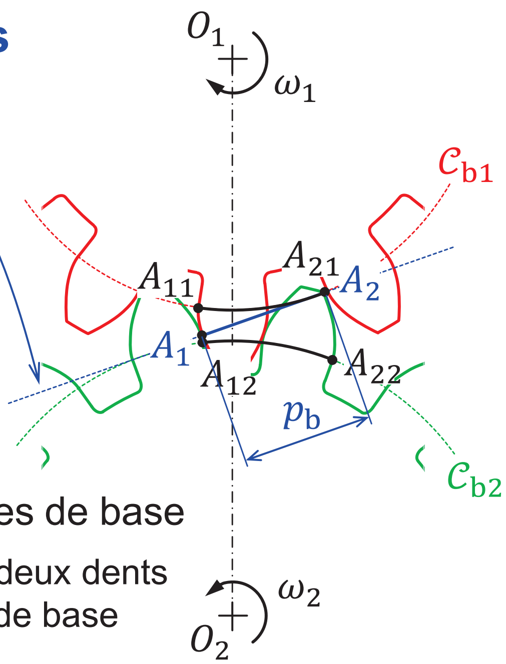
Condition d'engrènement

Soient deux roues dentées en prise : $(\mathcal{R}_1)$ menante et $(\mathcal{R}_2)$ menée

- **Lieu du contact entre les dents**

  → Le long de la ligne de pression
- **Condition d'engrènement**
  - Chacune des deux roues doit « avancer d'une dent » en même temps que l'autre…
  - Vitesse de rotation des roues définie par la vitesse de translation de la droite génératrice, via les cercles de base

    → Distance parcourue identique entre deux dents sur la génératrice et sur les cercles de base



→ $\|\overrightarrow{A_1A_2}\| = \overset{\frown}{A_{11}A_{21}} = \overset{\frown}{A_{12}A_{22}}$ → $p_{b1} = p_{b2} = p_b$

Condition de continuité

- **Longueur du contact**

  Soient deux roues dentées en prise : $(\mathcal{R}_1)$ menante et $(\mathcal{R}_2)$ menée

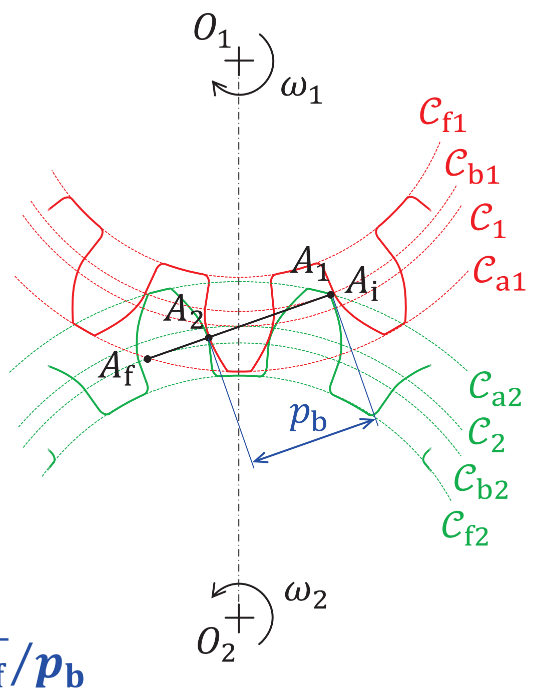
  → Contact le long de la ligne $A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}$ (porté par la droite de pression)

- **Condition de continuité**

  Le point de contact suivant doit être créé avant que le point de contact précédent ne soit rompu

  → Il faut $\overline{A_1A_2} < \overline{A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}}$

  → Il faut $\overline{A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}} > p_\mathrm{b}$



- **Rapport de conduite $\varepsilon_\alpha = \overline{A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}}/p_\mathrm{b}$**

  → Transmission continue ssi $\varepsilon_\alpha > 1$

Rapport de conduite (1/3)

- **Calcul de ε_α si dentures extérieures**

  – **On pose les points N_1 et N_2**

  → Points de contact entre la ligne de pression et les cercles de base

  → $\overline{A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}} = \overline{A_\mathrm{i}N_2} + \overline{A_\mathrm{f}N_1} - \overline{N_1N_2}$

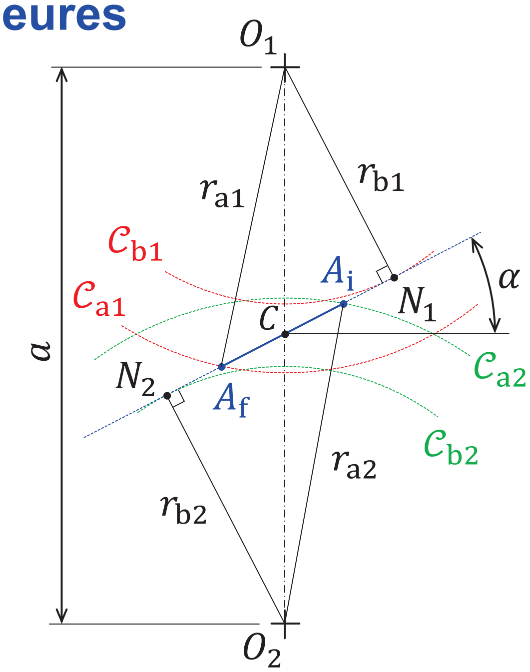
  – **Triangles $O_1N_1A_\mathrm{f}$ et $O_2N_2A_\mathrm{i}$**

  → $\overline{A_\mathrm{f}N_1} = \sqrt{\overline{O_1A_\mathrm{f}}^2 - \overline{O_1N_1}^2}$

  → $\overline{A_\mathrm{i}N_2} = \sqrt{\overline{O_2A_\mathrm{i}}^2 - \overline{O_2N_2}^2}$

  Avec $\overline{O_1A_\mathrm{f}} = r_{\mathrm{a}1}$; $\overline{O_1N_1} = r_{\mathrm{b}1}$

  $\overline{O_2A_\mathrm{i}} = r_{\mathrm{a}2}$; $\overline{O_2N_2} = r_{\mathrm{b}2}$



  – **De plus $\overline{N_1N_2} = \overline{N_1C} + \overline{CN_2}$**

  Avec $\overline{N_1C} = \overline{O_1C} \cdot \sin\alpha$ et $\overline{N_2C} = \overline{O_2C} \cdot \sin\alpha$ et $\overline{O_1C} + \overline{O_2C} = a$

Rapport de conduite (2/3)

- ## Calcul de ε_α si dentures ext. (suite)
  - **Finalement** → $\varepsilon_\alpha = \dfrac{1}{p_\mathrm{b}} \cdot \left[\sqrt{{r_{\mathrm{a}1}}^2 - {r_{\mathrm{b}1}}^2} + \sqrt{{r_{\mathrm{a}2}}^2 - {r_{\mathrm{b}2}}^2} - a \cdot \sin\alpha\right]$
  - **Dent normalisée** → $p_\mathrm{b} = p \cdot \cos\alpha = \pi \cdot m \cdot \cos\alpha$

    → $r_\mathrm{a} = r + m = m \cdot \left(\dfrac{Z}{2} + 1\right)$

    → $r_\mathrm{b} = r \cdot \cos\alpha = \dfrac{m \cdot Z}{2} \cdot \cos\alpha$

    → $a = \dfrac{m}{2} \cdot (Z_1 + Z_2)$
  - **Résolution**

$$\rightarrow \quad \varepsilon_\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{Z_1 + 2}{2 \cdot \cos\alpha}\right)^2 - \frac{{Z_1}^2}{4}} + \sqrt{\left(\frac{Z_2 + 2}{2 \cdot \cos\alpha}\right)^2 - \frac{{Z_2}^2}{4}} - \frac{Z_1 + Z_2}{2} \cdot \tan\alpha\right]$$

Rapport de conduite (3/3)

- ## Valeur maximale de ε_α
  - **À m et α constants, $\overline{A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}}$ ↗ si $r_{\mathrm{a}1}$ et $r_{\mathrm{a}2}$ ↗**

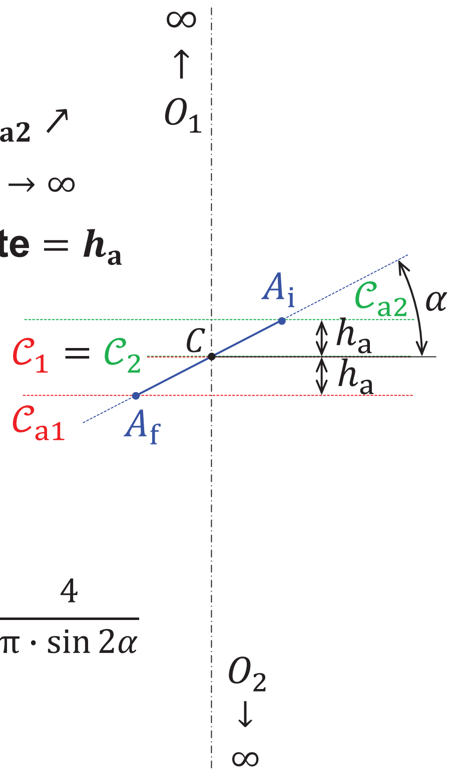
    → $(\varepsilon_\alpha)_\mathrm{Max}$ s'obtient lorsque $r_{\mathrm{a}1} \to \infty$ et $r_{\mathrm{a}2} \to \infty$
  - **Distance cercle primitif / cercle de tête = h_a**

    → $(\overline{A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}})_\mathrm{Max} = 2 \cdot h_\mathrm{a} / \sin\alpha$
  - **Dent normalisée**

    → $h_\mathrm{a} = m$

    → $p_\mathrm{b} = p \cdot \cos\alpha = \pi \cdot m \cdot \cos\alpha$
  - **D'où**

$$(\varepsilon_\alpha)_\mathrm{Max} = \frac{(\overline{A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}})_\mathrm{Max}}{p_\mathrm{b}} = \frac{2 \cdot m}{\pi \cdot m \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{4}{\pi \cdot \sin 2\alpha}$$



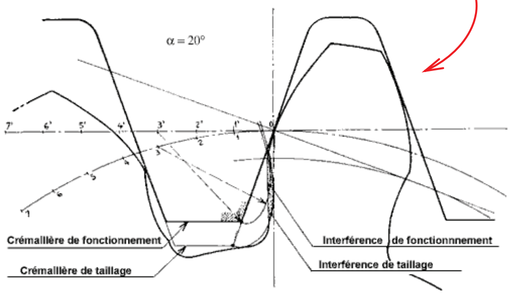
Conditions de non-interférence (1/10)

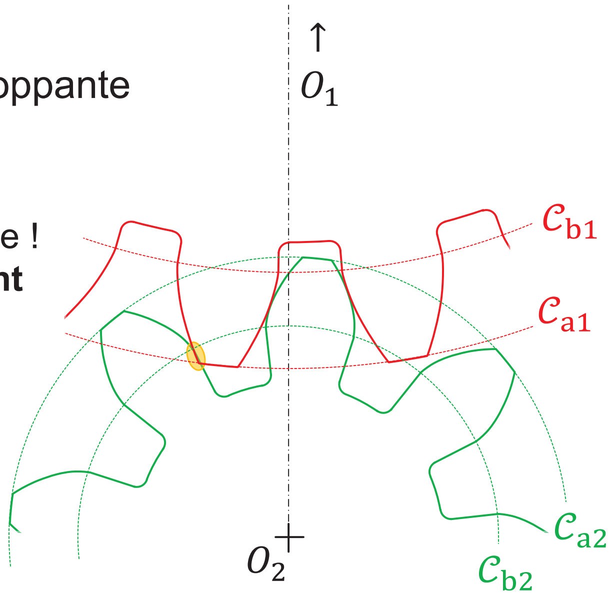
- **Définition de l'interférence**

  Contact entre la surface en développante
  de la dent de la première roue
  et la base de la dent conjuguée

  → Contraintes parasites et/ou blocage !
  = interférence de fonctionnement

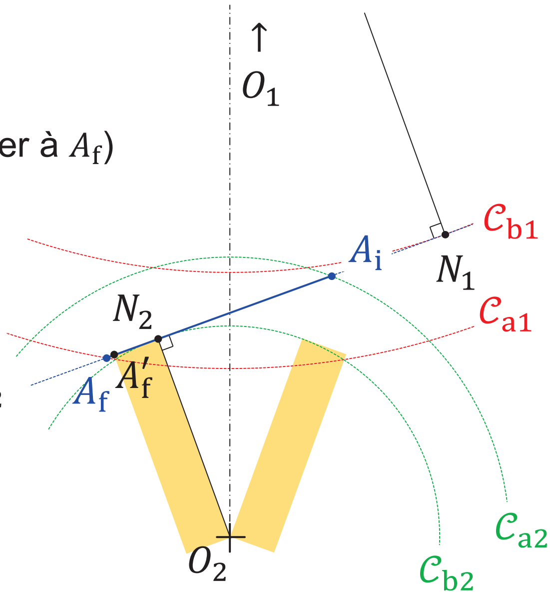
  → Pour s'en prémunir, on peut
  « raboter » la base des dents
  = interférence de taillage





Conditions de non-interférence (2/10)

- **Retour sur le cas précédent**
  - **Ligne de contact**
    → Contact rompu en A'_f (avant d'arriver à A_f)
  - **Zones d'interférence**
    → Bandes jaunes
  - **Plaçons les points N_1 et N_2**
    → Ici on constate que $(A_\mathrm{f}\,;A'_\mathrm{f}) \notin N_1N_2$
    → Bande jaune entre N_2 et A'_f
  - **Si on avait $A_\mathrm{f} \in N_1N_2$ alors**
    → Le point A'_f n'existerait pas
    → Il n'y aurait pas de contact dent / dent dans la zone jaune
    → Il n'y aurait pas d'interférence



- **Conditions de non-interférence** → Il faut $(A_\mathrm{i}\,;A_\mathrm{f}) \in N_1N_2$

Conditions de non-interférence (3/10)

- **Condition « $A_\mathrm{f} \in N_1N_2$ »**
  - **Cas limite si $A_\mathrm{f} = N_2$**
    - → Condition sur $(d_2)_\mathrm{min}$
    - → Déplacement du point A_i
- **Expression de $(d_2)_\mathrm{min}$**
  - **On pose $\overline{N_1A_\mathrm{f}} = \overline{N_1N_2}$**
  - **Or** $\overline{N_1N_2} = \overline{N_1C} + \overline{CN_2}$

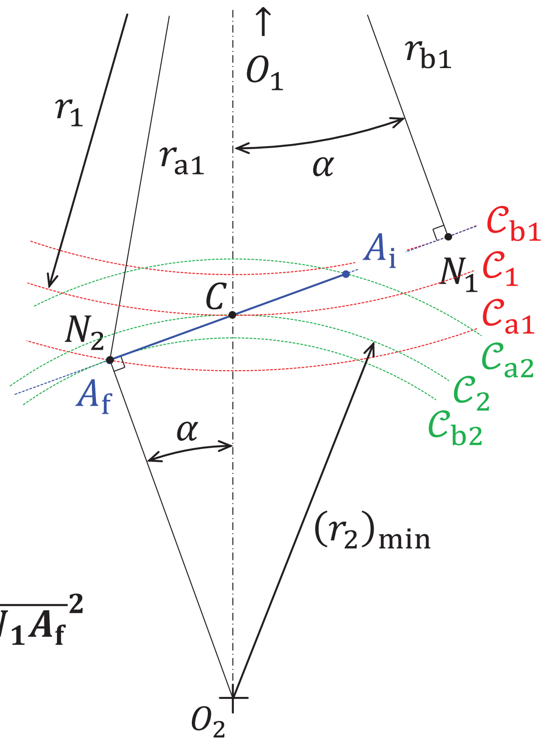
    Avec $\overline{N_1C} = r_1 \cdot \sin\alpha$

    $\overline{CN_2} = (r_2)_\mathrm{min} \cdot \sin\alpha$
  - **Et (triangle $O_1N_1A_\mathrm{f}$) :**

$$\overline{O_1A_\mathrm{f}}^2 = \overline{O_1N_1}^2 + \overline{N_1A_\mathrm{f}}^2$$

→ Avec $\overline{O_1A_\mathrm{f}} = r_{\mathrm{a}1} = r_1 + m$

$\overline{O_1N_1} = r_{\mathrm{b}1} = r_1 \cdot \cos\alpha$



Conditions de non-interférence (4/10)

- **Condition « $A_\mathrm{f} \in N_1N_2$ » (suite)**
  - **Résolution**

$$\rightarrow\ (d_2)_\mathrm{min} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{(d_1 + 2 \cdot m)^2 - (d_1 \cdot \cos\alpha)^2} - d_1$$

  - **Denture normalisée**

→ $d_1 = m \cdot Z_1$ et $d_2 = m \cdot Z_2$

$$\rightarrow\ (Z_2)_\mathrm{min} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{(Z_1 + 2)^2 - (Z_1 \cdot \cos\alpha)^2} - Z_1$$

  - **Après simplifications**

$$\rightarrow\ (Z_2)_\mathrm{min} = \sqrt{{Z_1}^2 + 4 \cdot \frac{1 + Z_1}{\sin^2\alpha}} - Z_1$$

Conditions de non-interférence (5/10)

- **Condition « $A_i \in N_1N_2$ »**
  - **Correspond à une condition de $(Z_2)_{Max}$ (avec Z_1 fixé)**
    - → Équivalent au cas Z_2 fixé et on cherche $(Z_1)_{min}$
    - → On réécrit l'expression de $(Z_2)_{min}$, mais « à l'envers »

$$Z_1 = \sqrt{{(Z_2)_{Max}}^2 + 4 \cdot \frac{1 + (Z_2)_{Max}}{\sin^2\alpha}} - (Z_2)_{Max}$$

  - **Après résolution, on obtient**

$$\rightarrow \quad (Z_2)_{Max} = \frac{\left(\frac{Z_1 \cdot \sin\alpha}{2}\right)^2 - 1}{1 - \frac{Z_1 \cdot \sin^2\alpha}{2}}$$

→ Expression valable uniquement si $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} + 1}{\sin^2\alpha} < Z_1 < \frac{2}{\sin^2\alpha}$

- Si $Z_1 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} + 1}{\sin^2\alpha}$ → interférence (voir slide suivant)
- Si $Z_1 \geq 2/\sin^2\alpha$ → $(Z_2)_{Max} \to \infty$ (voir cas pignon-crémaillère, slide 20)

Conditions de non-interférence (6/10)

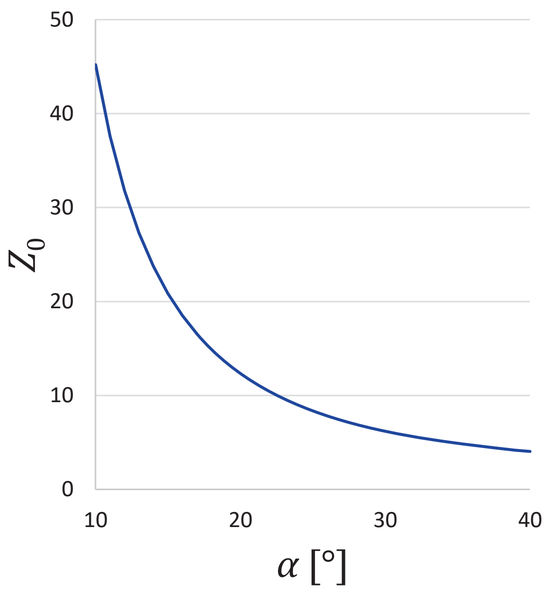
- **Cas si $Z_1 = Z_2 = Z_{min}$**
  - **On réécrit l'expression de $(Z_2)_{min}$ avec $(Z_2)_{min} = Z_1 = Z_0$**

$$\rightarrow Z_0 = \sqrt{{Z_0}^2 + 4 \cdot \frac{1 + Z_0}{\sin^2\alpha}} - Z_0$$

  - **Après résolution (polynôme du second degré), on obtient**

$$\rightarrow Z_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} + 1}{\sin^2\alpha}$$

→ Nombre minimum absolu de dents sans interférence, pour un α donné



Conditions de non-interférence (7/10)

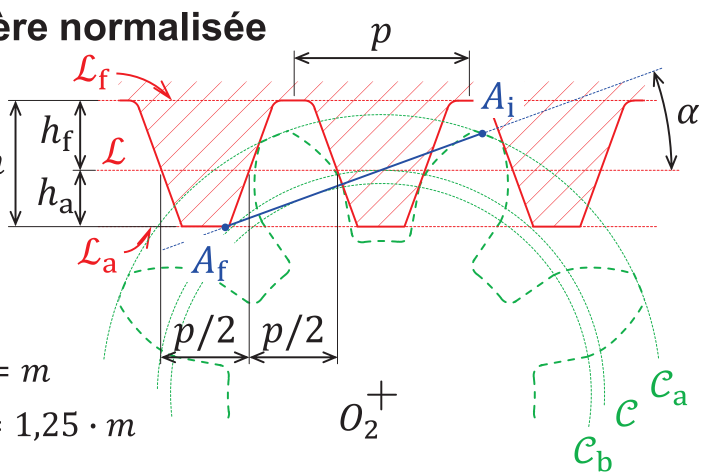
- ## Exercice d'application

Quels sont les rapports de conduite minimum et maximum que l'on peut obtenir sans interférence avec des roues dentées normalisées ?

Conditions de non-interférence (8/10)

- ## Cas de la crémaillère (1/3)

  – **Définition de la crémaillère normalisée**

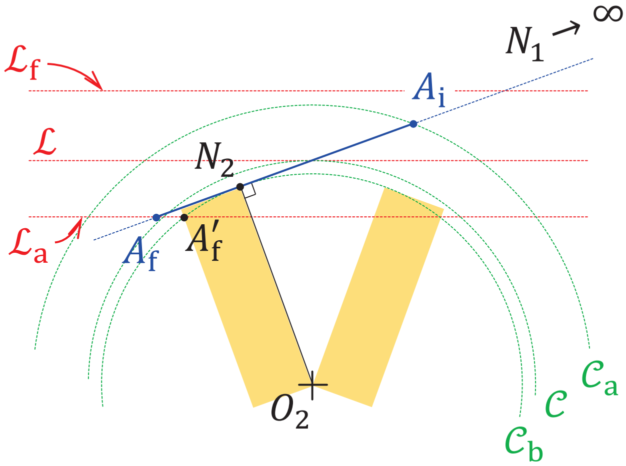


  - Pas $p = \pi \cdot m$
  - Hauteur de dent h
    → Ligne de tête $\mathcal{L}_a$
    → Ligne de pied $\mathcal{L}_f$
  - Ligne de référence $\mathcal{L}$
    → Hauteur de saillie $h_a = m$
    → Hauteur de creux $h_f = 1{,}25 \cdot m$
  - Angle de pression α
  - Ligne de contact $A_i A_f$
    → A_i et A_f : intersections de la ligne de tête / du cercle de tête avec la droite de pression

Conditions de non-interférence (9/10)

• Cas de la crémaillère (2/3)

- **Plaçons les points N_1 et N_2**
  - → N_1 repoussé à l'infini
  - → Ici N_2 est tel que $A_\mathrm{f} \notin N_1N_2$
- **Ligne de contact**
  - → Contact rompu en A'_f ($\notin A_\mathrm{i}A_\mathrm{f}$)
- **Interférence**
  - → Bande jaune entre N_2 et A'_f
- **Si on avait $A_\mathrm{f} \in N_1N_2$ alors**
  - → Le point A'_f n'existerait pas
  - → Il n'y aurait pas de contact dent / dent dans la zone jaune
  - → Il n'y aurait pas d'interférence
- **Conditions de non-interférence** → Il faut $A_\mathrm{f} \in N_1N_2$



Conditions de non-interférence (10/10)

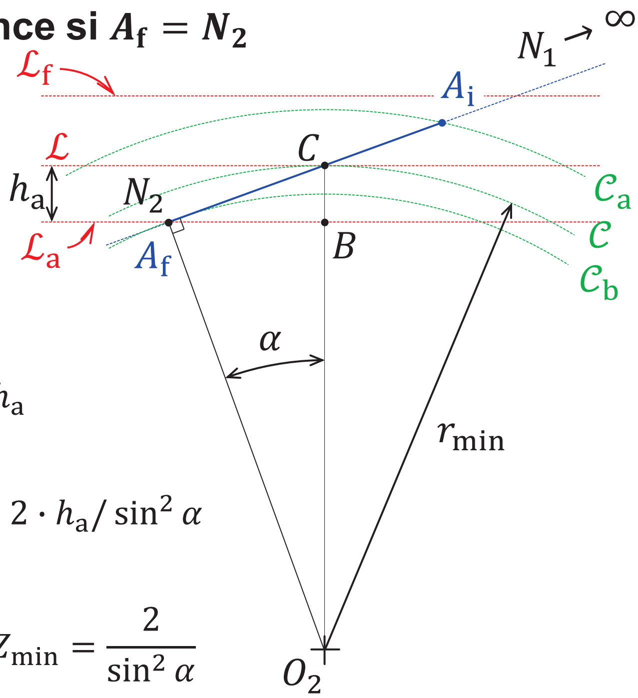
• Cas de la crémaillère (3/3)

- **Cas limite de non-interférence si $A_\mathrm{f} = N_2$**
  - → Condition sur d_min
  - → Déplacement du point A_i
- **Expression de d_min**
  - On pose $\overline{CA_\mathrm{f}} = \overline{CN_2}$

    Avec $\overline{CN_2} = r_\mathrm{min} \cdot \sin\alpha$
  - Soit le point B tel que $\overline{BC} = h_\mathrm{a}$

    Alors $\overline{CA_\mathrm{f}} = h_\mathrm{a} / \sin\alpha$
  - Finalement $d_\mathrm{min} = 2 \cdot r_\mathrm{min} = 2 \cdot h_\mathrm{a} / \sin^2\alpha$
- **Denture normalisée**

$$d = m \cdot Z \quad \text{et} \quad h_\mathrm{a} = m \quad \rightarrow \quad Z_\mathrm{min} = \frac{2}{\sin^2\alpha}$$



Des questions ?